Liga Zadaniowa – konkurs przedmiotowy z matematyki województwo kujawsko-pomorskie

Gimnazjum

Prezent wakacyjny 2017 r.

1. Trzej bracia, będący w różnym wieku, mają urodziny w tym samym dniu. Kiedy najstarszy brat kończył 12 lat, to suma lat wszystkich braci w tym momencie była podzielna przez 12. Tak samo było, gdy średni brat kończył 12 lat. Udowodnij, że własność ta będzie spełniona również w momencie, gdy najmłodszy brat będzie kończył 12 lat.

2. Okrągły tort o wadze 1 kg został pokrojony przez cukiernika matematyka wzdłuż trzech linii prostych, przy czym dwie z nich przechodzą przez środek tortu, a trzecia nie przechodzi przez środek tortu. Udowodnić, że co najmniej jedna z otrzymanych w wyniku podziału części tortu waży nie mniej niż $\frac{1}{6}$ kg.

3. Oblicz $\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4}}}}}$ (w wyrażeniu występuje 2017 pierwiastków).

4. Podać przykład siedmiu różnych liczb naturalnych, dla których suma ich odwrotności jest równa 1.

5. Wyznaczyć cztery liczby takie, że sumy par tych liczb są równe 1, 2, 4, 6, 8 i 9.

6. Liczby naturalne od 1 do 100 wypisać w jednym rzędzie w taki sposób, by różnica między każdymi dwoma sąsiednimi liczbami była równa 2 lub 3.

7. Wiadomo, że liczba naturalna n ma dokładnie 100 różnych dzielników. Udowodnić, że iloczyn tych dzielników jest równy n^{50}.

8. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczbami pierwszymi są:

   a) $p^2 + 2013$, b) $p^2 + 2018$.

9. Ile jest liczb czterocyfrowych, niepodzielnych przez 1000, w których pierwsza i ostatnia cyfra są parzyste?

10. Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie $xy + 3x - 5y = -3$.

11. Uzasadnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n^2 + 8n + 15$ nie dzieli się przez $n + 4$.

12. Mamy liczby naturalne od 1 do 1000000. Dla każdej z nich liczymy sumę jej cyfr otrzymując milion nowych liczb. Czynność tę powtarzamy z otrzymanymi liczbami. Proces ten kontynuujemy tak długo, aż otrzymamy milion liczb jednocyfrowych. Czy wśród tych liczb jest więcej jedynek, czy dwójek?

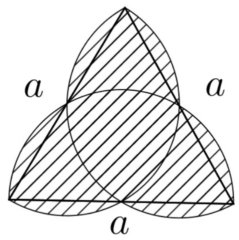
13. Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$.

14. Uzasadnić, że liczba $2^{2^{2017}} - 1$ jest podzielna przez 3.

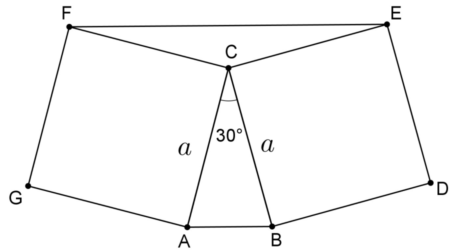
15. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne x, które można zapiać w postaci $x = \dfrac{mn+1}{m+n}$, gdzie m i n są pewnymi liczbami naturalnymi.

16. Czy istnieją dwie kolejne liczby naturalne takie, że suma cyfr każdej z nich dzieli się przez 25? Podaj najmniejsze takie liczby, jeżeli istnieją.

17. Czy istnieje liczba, której kwadrat zaczyna się cyframi 123456789 i kończy się cyframi 987654321?



18. Dany jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości a. Zatoczono trzy okręgi o środkach w środkach boków tego trójkąta (patrz rysunek). Oblicz pole i obwód zakreskowanej figury.



19. Dany jest trójkąt równoramienny ABC o ramionach AC i BC długości a oraz o kącie $|\sphericalangle ACB| = 30°$. Na ramionach tego trójkąta, na zewnątrz, zbudowano kwadraty (patrz rysunek). Oblicz pole figury $ABDEFG$.

20. Na boku AB trójkąta ABC, na zewnątrz trójkąta, zbudowano trójkąt równoboczny. Znaleźć odległość środka trójkąta równobocznego od wierzchołka C, jeśli $|AB| = c$ oraz $|\sphericalangle ACB| = 120°$.

21. W trójkącie prostokątnym długości przyprostokątnych są równe a i b. Na przeciwprostokątnej, na zewnątrz trójkąta, zbudowano kwadrat. Znaleźć odległość środka kwadratu od wierzchołka kąta prostego.

22. Na ramieniu AC trójkąta równoramiennego ABC ($|AC| = |BC|$) obrano punkt D. Na trójkątach ABD i BDC opisano okręgi o_1 i o_2. Styczna do okręgu o_1 w punkcie D przecina okrąg o_2 w punktach D i M. Udowodnić, że proste AB i CM są równoległe.

23. W trójkącie prostokątnym ABC poprowadzono środkową CD z wierzchołka kąta prostego. Niech K będzie punktem styczności okręgu wpisanego w trójkąt ADC z bokiem AD. Wyznaczyć kąty trójkąta ABC wiedząc, że K jest środkiem boku AD.

24. Dany jest odcinek AB. Wyznaczyć zbiór wszystkich punktów C takich, że trójkąt ABC jest ostrokątny.

25. Obwód wielokąta wypukłego jest równy 12. Niech A będzie zbiorem punktów leżących na zewnątrz tego wielokąta i oddalonych od niego o nie więcej niż 1. Uzasadnić, że pole zbioru A jest nie mniejsze niż 15.

26. Liczby $a,\ b,\ c$ mają własność $a + b + c = 0$. Udowodnić, że $ab + bc + ca \leqslant 0$.

27. Znaleźć trzy liczby takie, by każda z nich była równa kwadratowi różnicy dwóch pozostałych liczb.

28. W prostokącie o wymiarach 20×25 znajduje się 120 kwadratów, każdy o boku długości 1. Udowodnić, że w tym prostokącie można umieścić koło o średnicy 1 rozłączne z każdym z tych kwadratów.

29. Dwaj gracze grają w następującą grę: na tablicy wypisane są liczby $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 16, 17, 18, 19$ oddzielone przecinkami. Kolejno i na przemian podchodzą do tablicy i ścierają jeden z przecinków, a w miejsce startego przecinka wpisują znak „+” lub „·”. Operacja ta trwa tak długo, aż wszystkie przecinki zostaną starte. Jeżeli wartość otrzymanego wyrażenia będzie liczbą nieparzystą, to wygrywa zawodnik rozpoczynający, a jeśli będzie liczbą parzystą, to wygrywa jego konkurent. Który z zawodników ma strategię wygrywającą?

30. W prostokącie o polu 5 zawartych jest dziewięć prostokątów, każdy o polu 1. Udowodnić, że istnieją wśród nich takie dwa prostokąty, których część wspólna ma pole większe lub równe $\frac{1}{9}$.

Życzymy udanych wakacji!

Zapraszamy do udziału w Lidze Zadaniowej w roku szkolnym 2017/2018!